Examenul național de bacalaureat 2026
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Simulare județeană

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p 1. Se consideră numerele complexe $z_1 = 3+i, z_2 = 1-i$. Arătați că $z_1 - \overline{z}_2 \in \mathbb{R}$.

5p 2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=10-x$. Determinați numărul real nenul a pentru care $(f\circ f)(a)=a^2$.

5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2-4x+3}=\sqrt{x-3}$.

5p 4. Determinați probabilitatea ca alegând un număr de două cifre, suma cifrelor sale să fie divizibilă cu 9.

5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3), B(2,1), C(8,3)$. Demonstrați că lungimea segmentului DE este $\sqrt{10}$, unde D și E sunt mijloacele segmentelor AB, respectiv AC.

5p 6. Calculați $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$, dacă $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ și $\sin x = -\frac{3}{5}$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ și $A(x) = I_2 + x\cdot A$, unde $x\in\mathbb{R}$.

5p a) Arătați că $\det A(1) = 1$.

5p b) Determinați matricea $X \in M_2(\mathbb{R})$ pentru care $A(2)\cdot X = A(3)$.

5p c) Arătați că, dacă x și y sunt numere reale pentru care $A(x^2)\cdot A(y) = A(y^2)\cdot A(x)$, atunci $x = y$ sau $x + y = 1$.

2. Pe mulțimea numerelor reale definim legea de compoziție asociativă și comutativă $x\circ y = 2xy - 6x - 6y + 21$.

5p a) Calculați $\frac{1}{2}\circ 4$.

5p b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x\circ(x+3) = 39$.

5p c) Determinați numerele naturale n pentru care simetricul numărului $\frac{n}{4}$ în raport cu legea „$\circ$” este număr natural.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(-2,\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = \ln(x+2) - \frac{2(x+1)}{x+2}$.

5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{x}{(x+2)^2}, x\in(-2,\infty)$.

5p **b)** Determinați abscisa punctului situat pe graficul funcției *f* în care tangenta la graficul funcției este paralelă cu dreapta de ecuație $y = -x$.

5p **c)** Demonstrați că $\ln 2 - 1 \le f(2x+2) \le 2\ln 2 - \frac{3}{2}$, pentru orice $x \in [-1,0]$.

2. Se consideră funcția $f:(-1,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x(x+2)}{\sqrt{x+1}}$.

5p **a)** Calculați $\int f(x) \cdot \sqrt{x+1}\, dx$.

5p **b)** Demonstrați că funcția $F:(-1,\infty) \to \mathbb{R}, F(x) = \frac{2}{5}\sqrt{x+1}\left(x^2+2x-4\right)$ este o primitivă a funcției *f*.

5p **c)** Dacă $G:(-1,\infty) \to \mathbb{R}$ este o primitivă a funcției *f*, demonstrați că $G\left(\sqrt[3]{5}\right) < G\left(\sqrt{3}\right)$.